

построения управления и соответствующей траектории с использованием программного пакета Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and applications. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007. 314 p.
3. Максимов В.П., Чадов А.Л. Дискретное управление функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системой // Вестник Пермского университета. Экономика. 2013. № 1. С. 6-11.
4. Agranovich G.A. Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations. 2009. V. 16. №. 1. P.35-51.
5. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. V. 19. № 1-2. P. 49-62.
6. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Экономика. 2011. № 2. С. 13-23.
7. Максимов В.П., Чадов А.Л. Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 9. С. 72-76.
8. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13, №4. С. 601-606.
9. Андрианов Д.Л. Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 3-16.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96054) и компании «Прогноз».

Chadov A.L. RELIABLE COMPUTING EXPERIMENT FOR A CONTINUOUS-DISCRETE MODEL

A continuous-discrete system of functional-differential equations is considered. The main feature of the system under consideration is the presence of both continuous time and discrete time in the state variables and constant delay. The problem of control in the case of only discrete control with aftereffect is formulated. Necessary and sufficient conditions for the solvability of this problem are obtained in the form oriented to reliable computing experiment. Some details of computer implementation of the proposed approach are discussed.

Key words: discrete-continuous systems; hybrid systems; control problems; reliable computing experiment.

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

О ЛОКАЛЬНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВЫПУКЛОСТИ ТРУБОК ДОСТИЖИМОСТИ

© А.В. Чернов

Ключевые слова: трубка достижимости; локальные условия выпуклости; функционально-операторное уравнение; нелинейные распределенные системы.

Для нелинейного функционально-операторного уравнения, являющегося формой описания широкого класса управляемых начально-краевых задач, введено понятие трубки достижимости, аналогичное соответствующему понятию из теории управления сосредоточенными системами. Сформулированы локальные условия, обеспечивающие выпуклость трубки достижимости изучаемого уравнения.

Как указано в [1], информация о выпуклости множеств достижимости управляемых систем оказывается полезной при решении различных проблем управления. В частности, если целевой функционал и функционалы ограничений не зависят явно от управления, то от той или иной задачи оптимального управления можно перейти к задаче математического программирования с функционалами, заданными на множестве (трубка) достижимости. Если полученная таким образом задача оказывается выпуклой, то при определенных обстоятельствах можно доказать, что необходимые условия оптимальности становятся достаточными, имеют место теоремы двойственности, и, кроме того, удается построить эффективные численные методы. Информация о том, что множество (трубка) достижимости, отвечающая малой окрестности допустимого управления, выпукла, по аналогичным причинам оказывается полезной при выводе необходимых и достаточных условий локального минимума. Соответствующие достаточные условия будем называть локальными условиями выпуклости множества или трубки достижимости.

В работе [1] для нелинейных сосредоточенных управляемых систем была предложена техника получения локальных условий, обеспечивающих выпуклость множества достижимости. Доклад посвящен получению локальных достаточных условий выпуклости трубок достижимости широкого класса управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ), допускающих представление в виде функционально-операторного уравнения В.И. Сумина — см. далее уравнение (1). Соответствующая техника основана на идеях [1], использовании теоремы о неявной функции и некоторых идеях автора.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$; $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое ограниченное множество; $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $q \geq 2$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_2(\Pi)$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{X}} = L_\sigma(\Pi)$, $(1/q) + (1/\sigma) = 1/2$, $\mathcal{Z}_{\mathcal{U}} = L_\infty(\Pi)$. Пусть, кроме того, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ — заданное множество, $A: \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{X}^\ell$ — заданный линейный ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение В.И. Сумина:

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), u(t)\right), \quad t \in \Pi, \quad z \in \mathcal{Z}^m, \quad (1)$$

управляемое с помощью управления $u \in \mathcal{D}$. Здесь функция $f(t, x, u): \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ измерима по $t \in \Pi$, непрерывна по $\{x, u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и такова, что $\forall x \in \mathcal{X}^\ell, u \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{Z}^m$.

Множество $\Xi(\mathcal{D}) \equiv \left\{ \xi \in \mathcal{Z}^m : \exists u \in \mathcal{D} \text{ такое, что } z[u] = \xi \right\}$ назовем *трубкой достижимости управляемого уравнения* (1). Связь между решением управляемой НКЗ и решением соответствующего уравнения (1) обычно имеет вид $x = A[z]$, либо $x = A_1[z]$ и т. п.. Таким образом, если имеет место выпуклость трубки достижимости уравнения (1), то очевидным образом получаем выпуклость трубки достижимости исходной НКЗ.

Далее будем считать, что управление $\bar{u} \in \mathcal{U}^s$ таково, что ему отвечает единственное решение $\bar{z} = z[\bar{u}]$ уравнения (1), $\bar{y} = A[\bar{z}]$. Кроме того, будем предполагать, что выполняются следующие условия.

F₁) Функция $f(t, y, u)$ имеет частные производные

$$f'_y(t, y, u): \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{m \times \ell}, \quad f'_u(t, y, u): \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{m \times s},$$

измеримые по $t \in \Pi$, непрерывные по $\{y, u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$, причем $f'_y(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{Z}^{m \times \ell}$, $f'_u(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{Z}^{m \times s} \forall y \in \mathcal{X}^\ell, u \in \mathcal{U}^s$.

F₂) Существует функция $\mathcal{N}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\|f'_y(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) - f'_y(\cdot, x(\cdot), v(\cdot))\| \leq \mathcal{N}(M)\{\|y - x\| + \|u - v\|\},$$

$$\|f'_u(., y(.), u(.) - f'_u(., x(.), v(.))\| \leq \mathcal{N}(M)\{\|y - x\| + \|u - v\|\}$$

для всех $y, x \in \mathcal{X}^\ell$, $u, v \in \mathcal{U}^s$, $\|y\|$, $\|x\|$, $\|u\|$, $\|v\| \leq M$.

F₃) $\text{rank } f'_u(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) = m$ для п. в. $t \in \Pi$, и более того, уравнение $f'_u(., \bar{y}, \bar{u})u = z$ разрешимо относительно $u \in \mathcal{U}^s$ для любого $z \in \mathcal{Z}^m$.

A) Для любого $\varphi \in \mathcal{Z}^{m \times \ell}$ и оператора $A_{(\varphi)}: \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{Z}^m$, определяемого формулой $A_{(\varphi)}[z] = \varphi A[z]$, спектральный радиус $\rho(A_{(\varphi)}) = 0$.

Для числа $\varepsilon > 0$ обозначим $\mathcal{D}_\varepsilon = \{u \in \mathcal{U}^s: \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon\}$. При сделанных предположениях справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что: 1) для всякого $u \in \mathcal{D}_\varepsilon$ уравнение (1) имеет единственное решение $z = z[u]$; 2) образ множества $\mathcal{D}_\varepsilon$ при отображении $z = z[u]$ является выпуклым, и более того, строго выпуклым (то есть множество $\Xi(\mathcal{D}_\varepsilon)$ выпукло и строго выпукло); 3) граница $\partial z[\mathcal{D}_\varepsilon] = \partial \Xi(\mathcal{D}_\varepsilon)$ порождается лишь границей $\partial \mathcal{D}_\varepsilon$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyak B. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. A: Mathematical Analysis. 2004. V. 11. №. 2–3. P. 255–268.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

Chernov A.V. ON CONVEXITY LOCAL CONDITIONS FOR REACHABLE TUBES

For a nonlinear functional operator equation being a form of describing for a wide class of controlled initial boundary value problems, we introduce the reachable tube concept as analog of the corresponding concept from the control theory of lumped systems. We formulate local sufficient conditions for the convexity of the reachable tube of the equation under consideration.

Key words: reachable tube; convexity local conditions; functional operator equation; nonlinear distributed systems.

УДК 517.929

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© К.М. Чудинов

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; устойчивость; test-уравнение.

Метод test-уравнений, применяемый для исследования асимптотических свойств решений неавтономных уравнений с последствием, до сих пор использовался только при изучении классов линейных уравнений. В работе показано применение метода к исследованию устойчивости нелинейных уравнений.